مسألة ، سنحلها باستخدام المنطق الكلاسيكي :

ثلاثة مشتبهين في جريمة ، باسم وجابر و سامر، تم استجوابهم فكانت شهاداتهم على النحو الآتي :

باسم قال: جابر بريء وسامر مذنب .

جابر قال: إذا كان باسم مذنباً ،فإن سامر مذنبٌ.

سامر قال: أنا بريء وواحد من الاثنين مذنب .

والمطلوب :

١- هل الشهادات الثلاث منسجمة (متوافقة)؟

٢- هل شهادة أحدهم يمكن استنتاجها من شهادة آخر ؟

٣- بفرض أن الثلاثة بريئين ، من كان شاهد زور (شهادته غير صحيحة)؟

٤- إذا كانت الشهادات الثلاث صحيحة ، من هو المذنب ومن هو البريء ؟

٥- بفرض أن البريء قال الحقيقة والمذنب كان كاذباً ، فمن هو المذنب؟

الحل:

سنرمز بالرمز b للقضية المنطقية التي تعني أن باسم بريء ، ونرمز لشهادة باسم-التي هي صيغة منطقية- بالرمز B .

وبالرمز j للقضية المنطقية التي تعني أن جابر بريء، ونرمز لشهادة جابر-التي هي صيغة منطقية- بالرمز J.

وبالرمز s للقضية المنطقية التي تعني أن سامر بريء ، ونرمز لشهادة سامر-التي هي صيغة منطقية- بالرمز S .

فيكون :

شهادة باسم هي الصيغة $B = (\neg j \wedge s)$ (الرمز j يعني أن جابر بريء و $\neg j$ يعني أنه ليس بريئاً أي مذنبٌ) .

شهادة جابر هي الصيغة $J = (\neg b \Longrightarrow \neg s)$.

شهادة سامر هي الصيغة $S = \big(s \wedge (\neg b \vee \neg j)\big)$. (الصيغة $(\neg b \vee \neg j)$ تعني أنه إما باسم مذنب أو جابر مذنب).

سنستخدم جدول الحقيقة لحل هذه المسألة.

b	j	s	$\neg b$	$\neg j$	$\neg s$	$B = (\neg j \wedge s)$	$J = (\neg b \Rightarrow \neg s)$	$(\neg b \vee \neg j)$	$S = \big(s \wedge (\neg b \vee \neg j)\big)$
1	1	1	0	0	0	0	1	0	0
1	1	0	0	0	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	1	1	0
0	1	1	1	0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1	1	0
0	0	1	1	1	0	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1	0	1	1	0



ملاحظة حول الجدول :

على سبيل المثال إن $b = 0$ للدلالة على أن الصيغة- التي تعني أن باسم بريء - خاطئة أي أن باسم مذنب.

و $b = 1$ تعني أنه بريء.

وعندما يكون مثلاً $J = 1$ فهذا يعني أنَّ الصيغة التي تمثل شهادة جابر ،صحيحة (جابر ليس كاذباً) ، و$J = 0$ تعني أنه كاذبٌ (شهادته زور)

المناقشة:

١- المقصود من السؤال هل يوجد حالة تكون فيها جميع الشهادات الثلاث صحيحة معاً ؟ والجواب نعم، من الممكن أن تكون الشهادات الثلاث متوافقة .وذلك إذا نظرنا إلى السطر الثالث بالجدول نجد المطلوب$B = 1$ و $J = 1$ و $S = 1$.

٢- تكون شهادة احد المتهمين مستنتجة من شهادة آخر (شهادة أحدهم يمكن استنتاجها من شهادة آخر) إذا كان أحد الاقتضاءات التالية صحيح(أي احد الاقتضاءات استدلال) ، $(\boldsymbol{B \Rightarrow S})$ ، $(\boldsymbol{B \Rightarrow J})$ ، $(\boldsymbol{J \Rightarrow S})$ ، $(\boldsymbol{J \Rightarrow B})$ ، $(\boldsymbol{S \Rightarrow B})$ ، $(\boldsymbol{S \Rightarrow J})$.

وباستخدام جدول الحقيقة نجد أن الاقتضاء $(\boldsymbol{B \Rightarrow S})$ هو استدلال(مهما تكن قيم b, j, s) أي شهادة سامر يمكن استنتاجها من شهادة باسم، وهو الاقتضاء الوحيد الذي يكون استدلالاً. أي أن فقط ، شهادة سامر يمكن استنتاجها من شهادة باسم.

٣- بفرض أن الثلاثة بريئين ، أي أنّ $b = 1, j = 1, s = 1$ ، من كان شاهد زور(من ستكون القيمة المنطقية لشهادته صفراً) ؟

بالعودة للجدول نجد بالنظر إلى السطر الأول $\boldsymbol{B = 0}$ و $\boldsymbol{J = 1}$ و $\boldsymbol{S = 0}$. أي باسم وسامر كانا كاذبين في شهادتيهما أما جابر فكان محقاً في شهادته .

٤- حسب ما وجدنا في الطلب الأول أن في السطر الثالث من الجدول تكون الشهادات الثلاث صحيحة معاً ، وفي هذه الحالة يكون $b = 1, j = 0, s = 1$ أيْ أنَّ باسم وسامر أبرياء وجابر المذنب .

٥- بفرض أن البريء قال الحقيقة والمذنب كان كاذباً ، نبحث بالجدول على السطر الذي يكون فيه المتهم وشهادته القيمة المنطقية نفسها (أي تتوافق فيه براءة المتهم مع صدق ادّعائه وإدانة المتهم مع شهادته الزور) ، وذلك لأجل المتهمين الثلاثة، نتحقق من كل الأسطر فنجد أنَّه في السطر السادس يكون باسم و سامر مذنبين وشهادتيهما زور (غير صحيحة) أما جابر فهو بريء وشهادته صحيحة.

ملاحظة :حول الاقتضاء

إن الاقتضاء $p \Longrightarrow q$ يمكن النظر له على أنه مثل الوعد.

فمثلاً قولنا: " إذا درست أول عشر محاضرات بمادة فلانية فإنك ستنجح بهذه المادة " ونمثل هذا القول بالاقتضاء $p \Longrightarrow q$ حيث الصيغة p تعني دراسة أول عشر محاضرات، والصيغة q تعني النجاح في المادة .

والآن إذا درس طالب أول عشر محاضرات $(p = 1)$ونجح بالمادة $(q = 1)$ فهذا أمر طبيعي ويكون قد تحقق الوعد (الاقتضاء صحيح).

وإذا لم يدرس أول عشر محاضرات $(p = 0)$ ولم ينجح بالمادة $(q = 0)$ فهذا أمر طبيعي ولا يكون قد اختل شرط الوعد(الاقتضاء صحيح أيضاً).

وربَّما يأتي طالب لم يدرس أول عشر محاضرات $(p = 0)$ لكنه نجح بالمادة$(q = 1)$ وهذا ممكن (الاقتضاء صحيح).

لكن أن يدرس طالب أول عشر محاضرات $(p = 1)$ ولا ينجح $(q = 0)$ ، هذا غير ممكن أي لم يتحقق الوعد وهنا يكون الاقتضاء خاطئاً.

ملاحظة: مر معنا في المسألة السابقة أن أحد المتهمين، جابر و باسم ، مذنب.

إنَّ الصيغة $(\neg b \vee \neg j)$ تعني إما باسم مذنب أو جابر مذنب وهي عملياً تعني إما باسم مذنب وجابر بريء $(\neg b \wedge j)$ أو باسم بريء و جابر مذنب $(b \wedge \neg j)$ أو باسم مذنب و جابر مذنب $(\neg b \wedge \neg j)$.

ومنطقياً $(\neg b \vee \neg j) = (\neg b \wedge j) \vee (b \wedge \neg j) \vee (\neg b \wedge \neg j)$. (صيغتان متكافئتان ويبرهن على ذلك بسهولة)

ملاحظة :

مر معنا في المحاضرة السابقة كتابة استدلال بالطريقة الطابقية وهي شكل للكتابة .

فمثلاً $\frac{F}{G}$ نعني بها أنه إذا كانت Fصحيحة فإن G صحيحة .

وبشكل عام نكتب $\frac{A_1, A_2, \dots, A_n}{B}$ إذا كانت الصيغة $(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \longrightarrow B)$ استدلالاً.

أهم القواعد التي يمكن كتابتها باستخدام الطريقة الطابقية:

قاعدة النزع (الابتلاع) :

رأينا أن الصيغة $(p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q)$ هي استدلال ، يمكن كتابتها على الشكل $\frac{p\,,\ \ p \Rightarrow q}{q}$ ، وهي تعني أن إذا كانت p صحيحة و كان الاقتضاء $p \Rightarrow q$ صحيحاً ، فإن q صحيحة .

خاصة (قاعدة) التعدي:

يمكننا البرهان على أن الصيغة التالية $\big(((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)\big)$ هي استدلال والتي تدعى بـ خاصية التعدي ويمكن كتابتها على الشكل الطابقي كما يلي :

$$\frac{p \Rightarrow q\ ,\ \ q \Rightarrow r}{p \Rightarrow r}$$

:. انتهت المحاضرة الخامسة :.